ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান

মোঃ সিফাত হাসান

[আমরা ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে যাচ্ছি! তবে, এর আগে কিছু জিনিস পরিষ্কার হওয়া দরকার।]

"ত্রিঘাত সমীকরণ" জিনিসটা আসলে কী?

$\Longrightarrow$ তিন ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণই "ত্রিঘাত সমীকরণ"।

এই যেমনঃ

- $ax + b = 0$ সমীকরণটিতে চলক 'x' এর সর্বোচ্চ ঘাত $= 1$

$\longrightarrow$ তাই একে একঘাতী সমীকরণ বা সরল সমীকরণ $(Linear\ Equation)$ বলে।

আবার,

- $ax^2 + bx + c = 0$ কে দুইঘাতী বা দ্বিঘাত সমীকরণ $(Quadratic\ Equation)$ বলে।

$\longrightarrow$ যেহেতু 'x' এর সর্বোচ্চ ঘাত $= 2$

একইভাবে,

- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ কে তিনঘাতী বা ত্রিঘাত সমীকরণ $(Cubic\ Equation)$ বলে।

$\longrightarrow$ যেহেতু 'x' এর সর্বোচ্চ ঘাত $= 3$

এধরণের সমীরকণের ক্ষেত্রে তাদের ঘাত সংখ্যার সমান সংখ্যক মূল বা সমাধান থাকে।

যেমনঃ

- ✓ সরল সমীকরণের মাত্র একটিই সমাধান থাকে।
- ✓ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান থাকে দুইটি।
- ✓ একইভাবে, ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি সমাধান থাকে।

জানলাম, ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান থাকে তিনটি। কিন্তু কীভাবে?

ব্যাপারটা উল্টোভাবে দেখা যাক। ধরি, কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি সমাধান যথাক্রমে α, β, γ।

এর অর্থ হচ্ছে, $x = \alpha,\quad x = \beta,\quad x = \gamma$ বা, $x - \alpha = 0,\quad x - \beta = 0,\quad x - \gamma = 0$

তাহলে, $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$

এই সমীকরণের বিস্তার ঘটালে পাই, $1x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma = 0$ যা একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

এটিই প্রমাণ করে যে ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূল থাকে। **(একইভাবে, দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি মূল থাকার কারণও সহজেই বোঝা যায়!)**

[তাহলে শুরু করা যাক]

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$ [এটি ত্রিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপ]

$$\Rightarrow x^3 + \frac{a_1}{a_0}x^2 + \frac{a_2}{a_0}x + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \left[\because a = \frac{a_1}{a_0},\quad b = \frac{a_2}{a_0},\quad c = \frac{a_3}{a_0}\right]$$

আমাদের এই সমীকরণকে Depress করে এরকম সমীকরণ বানাতে হবেঃ

$$y^3 + py + q = 0$$ [যেখানে, y^2 এর সহগ $= 0$]

তাই ধরি,

$$x = y + h$$

এখন,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow (y+h)^3 + a(y+h)^2 + b(y+h) + c = 0$$

$$\Rightarrow [y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3] + a[y^2 + 2yh + h^2] + b(y+h) + c = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + ay^2 + 2ayh + ah^2 + by + bh + c = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 3y^2h + ay^2 + 3yh^2 + 2ayh + by + h^3 + ah^2 + bh + c = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + (3h + a)y^2 + (3h^2 + 2ah + b)y + (h^3 + ah^2 + bh + c) = 0$$

এখানে, y^2 এর সহগ 0 হবে, যখন :

$$3h + a = 0 \qquad \Rightarrow h = -\frac{a}{3}$$

তাহলে,

$$x = y - \frac{a}{3}$$

এখন,

$$y^3 + (3h + a)y^2 + (3h^2 + 2ah + b)y + (h^3 + ah^2 + bh + c) = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + \left[3\left(-\frac{a}{3}\right) + a\right]y^2 + \left[3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b\right]y + \left[\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c\right] = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + [-a + a]y^2 + \left[\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right]y + \left[-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right] = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

এখানে ধরি,

$$\boldsymbol{p} = b - \frac{a^2}{3}, \qquad \boldsymbol{q} = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

তাহলে,

$$y^3 + py + q = 0$$

একটা Interesting ব্যাপার দেখা যাক:

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$
$$\Longrightarrow (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

$y^3 + py + q = 0$ সমীকরণের সাথে উপরের সমীকরণকে তুলনা করে পাই:

$y = u + v$

$p = -3uv \quad \Longrightarrow p^3 = -27u^3v^3 \quad \Longrightarrow u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$

$q = -(u^3+v^3) \quad \Longrightarrow (u^3+v^3) = -q$

এখন আমাদের যেভাবেই হোক u^3 এবং v^3 এর মান হিসাব করতে হবে।
[তাহলেই, u এবং v এর মান পাওয়া যাবে। আর তাহলেই, $y = u + v$ এর মান হিসাব করা যাবে।]

ধরি, u^3 এবং v^3 উভয়ই একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল।
অর্থাৎ, $z = u^3, \quad z = v^3$

তাহলে,

$$(z-u^3)(z-v^3) = 0$$

$$\Longrightarrow z^2 - (u^3+v^3)z + u^3v^3 = 0 \qquad \Longrightarrow z^2 - (-q)z + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\Longrightarrow z = \frac{(-q) \pm \sqrt{(-q)^2 - 4\times 1 \times \left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2\times 1} \qquad \Longrightarrow z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \qquad \Longrightarrow z = \frac{-q \pm \sqrt{4\left(\frac{q^2}{4}\right) + \frac{4p^3}{27}}}{2} \qquad \Longrightarrow z = \frac{-q \pm 2\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}\right) + \frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$\Longrightarrow z = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ধরি,

$$m = \frac{-q}{2} \quad , \quad N = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Longrightarrow z = m + \sqrt{N} \quad , \quad z = m - \sqrt{N}$$

তাহলে,

$$u^3 = m + \sqrt{N} \quad , \quad v^3 = m - \sqrt{N}$$
$$\Longrightarrow u = \sqrt[3]{m + \sqrt{N}} \quad , \quad v = \sqrt[3]{m - \sqrt{N}}$$

ফলে,

$$y = u + v$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y} = \sqrt[3]{m + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y_1} = \sqrt[3]{m + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{N}}$$ [এটি y এর তিনটি মূলের প্রথমটি]

[যদি N অঋণাত্মক হয়, তাহলে তো কোনো সমস্যাই নেই।]

কিন্তু, যদি N ঋণাত্মক হয় তাহলে যা করতে হবে:

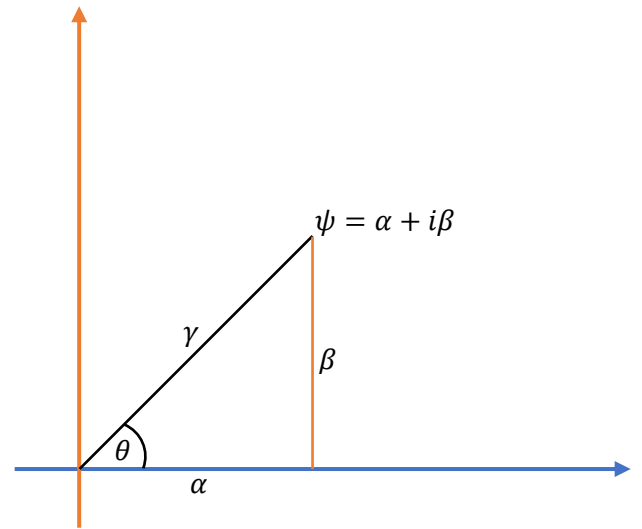
$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\arg(\psi) = \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right), & \text{জটিলসংখ্যাটি ১ম চতুর্ভাগে থাকলে} \\ \pi - \tan^{-1}\left(\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right), & \text{জটিলসংখ্যাটি ২য় চতুর্ভাগে থাকলে} \\ \pi + \tan^{-1}\left(\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right), & \text{জটিলসংখ্যাটি ৩য় চতুর্ভাগে থাকলে} \\ -\tan^{-1}\left(\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right), & \text{জটিলসংখ্যাটি ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকলে} \end{cases}$$

$$\alpha = \gamma\cos\theta \qquad \beta = \gamma\sin\theta$$

$$\alpha + i\beta = \gamma\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \gamma\, e^{i\theta} \qquad [\because \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \text{ অয়লারের সূত্র}]$$

[Article এর শেষে এর প্রমাণ দেওয়া হয়েছে]

ধরি, $n = \sqrt{|N|}$

তাহলে, N ঋণাত্মক হলে, $\sqrt{N} = in$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y_1} = \sqrt[3]{m + in} + \sqrt[3]{m - in}$$

এখন জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি ব্যবহার করে y_1 এর মান নির্ণয় করা যাক:

ধরি, $r = \sqrt{m^2 + n^2}$

$$\sqrt[3]{m + in} = \sqrt[3]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[3]{r}\,\sqrt[3]{e^{i\theta}} = \sqrt[3]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{3}\right)} = \sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right]$$

অনুরূপভাবে,

$$\sqrt[3]{m - in} = \sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right]$$

সুতরাং,

$$\boldsymbol{y_1} = \sqrt[3]{m+in} + \sqrt[3]{m-in} = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\frac{\theta}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y_1} = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\frac{\theta}{3}$$

[এটি y এর তিনটি মূলের প্রথমটি — কেবল মাত্র তখন, যখন N ঋণাত্মক]

ধরি, y এর এই প্রথম মূল, $\boldsymbol{y_1} = t$; $y = t$ হওয়ায়, $t^3 + pt + q = 0$

এখন,

$$y^3 + py + q = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - ty^2 + ty^2 - t^2y + py - t(t^2+p) + t(t^2+p) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - ty^2 + ty^2 - t^2y + py - t^3 - pt + t^3 + pt + q = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(y-t) + ty(y-t) + (t^2+p)y - t(t^2+p) + (t^3+pt+q) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(y-t) + ty(y-t) + (t^2+p)(y-t) + (t^3+pt+q) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2+ty+t^2+p)(y-t) = 0 \qquad [\because\ t^3+pt+q=0]$$

$(y-t) = 0$ অথবা, $(y^2+ty+t^2+p) = 0$

$$y^2 + ty + (t^2+p) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4(t^2+p)}}{2} \qquad \Rightarrow y = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4t^2 - 4p}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-t \pm \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2}$$

তাহলে,

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{-t + \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2} \quad , \quad \boldsymbol{y_3} = \frac{-t - \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2}$$

এখন $\boldsymbol{y}$ এর তিনটি মান নিচের সমীকরণে বসিয়ে $\boldsymbol{x}$ এর তিনটি মান পাওয়া যাবে:

$$\boldsymbol{x} = y - \frac{a}{3}$$

অয়লারের সূত্র

ধরা যাক,

$$f(\theta) = y = e^{i\theta}$$

$\Leftrightarrow y' = \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}$ $\left[\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}\right]$

$\Leftrightarrow y' = ie^{i\theta}$

$\Leftrightarrow iy' = i(ie^{i\theta})$

$\Leftrightarrow iy' = -e^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow iy' = -y$$

আবার ধরি,

$$f(\theta) = y = \cos(\theta) + isin(\theta)$$

$\Leftrightarrow y' = \frac{dy}{d\theta} = -\sin(\theta) + icos(\theta)$ $\left[\frac{d}{dx}(\sin\theta) = \cos\theta, \quad \frac{d}{dx}(\cos\theta) = -\sin\theta\right]$

$\Leftrightarrow iy' = i[-\sin(\theta) + icos(\theta)]$

$\Leftrightarrow iy' = -i\sin(\theta) - cos(\theta)$

$\Leftrightarrow iy' = -[cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$\Leftrightarrow iy' = -y$$

তাহলে,

$$f(\theta) = y = e^{i\theta} = \cos(\theta) + isin(\theta)$$

$$\Longrightarrow e^{i\theta} = \cos(\theta) + isin(\theta)$$ [অয়লারের সূত্র]

নিচে কিছু উদাহরণ দেওয়া হয়েছে, কীভাবে ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে হয়!
এগুলো বুঝতে পারলেই হবে; যেকোনো ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধান করাই ডাল-ভাত হয়ে যাবে!

$Example - 1$

$$2x^3 - 30x^2 + 142x - 210 = 0$$

$$\Longrightarrow x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$$

$$p = b - \frac{a^2}{3} = 71 - \frac{(-15)^2}{3} = -4 \quad , \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2(-15)^3}{27} - \frac{(-15) \times 71}{3} + (-105) = 0$$

$$y^3 + py + q = 0 \quad \Longrightarrow y^3 - 4y + 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad Depressed\ Equation$$

$$m = \frac{-q}{2} = \frac{-0}{2} = 0 \quad , \quad N = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$$

$First\ Root\ of\ 'y'\ (y_1):$

$$\boldsymbol{y_1} = \sqrt[3]{m + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{N}} = \sqrt[3]{0 + \frac{8\sqrt{3}}{9}i} + \sqrt[3]{0 - \frac{8\sqrt{3}}{9}i} = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}i} - \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}i} = 0 = t$$

$Other\ 2\ Roots\ of\ 'y'\ (y_2,\ y_3):$

$$\boldsymbol{y_{2,3}} = \frac{-t \pm \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-3(0)^2 - 4(-4)}}{2} = \pm 2$$

$All\ 3\ Roots\ of\ 'x'\ (x_1,\ x_2,\ x_3):$

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} = 0 - \frac{-15}{3} = 5$$
$$x_2 = y_2 - \frac{a}{3} = 2 - \frac{-15}{3} = 7$$
$$x_3 = y_3 - \frac{a}{3} = -2 - \frac{-15}{3} = 3$$

$$x = 5,\ \ 7,\ \ 3$$

$Example - 2$

$$x^3 - x^2 - 7x - 65 = 0$$

$$\Longrightarrow x^3 - x^2 - 7x - 65 = 0$$

$$p = b - \frac{a^2}{3} = -7 - \frac{(-1)^2}{3} = -\frac{22}{3} \quad , \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2(-1)^3}{27} - \frac{(-1)\times(-7)}{3} + (-65) = -\frac{1820}{27}$$

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \Longrightarrow y^3 - \frac{22}{3}y - \frac{1820}{27} = 0 \qquad \longrightarrow \quad \textit{Depressed Equation}$$

$$m = \frac{-q}{2} = \frac{-\left(-\frac{1820}{27}\right)}{2} = \frac{912}{27} \qquad , \qquad N = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-\frac{1820}{27}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{22}{3}}{3}\right)^3 = \frac{3364}{3}$$

First Root of 'y' (y_1):

$$y_1 = \sqrt[3]{m + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{N}} = \sqrt[3]{\frac{912}{27} + \sqrt{\frac{3364}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{912}{27} - \sqrt{\frac{3364}{3}}} = \frac{14}{3} = t$$

Other 2 Root of 'y' (y_2, y_3):

$$y_{2,3} = \frac{-t \pm \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2} = \frac{-\frac{14}{3} \pm \sqrt{-3\left(\frac{14}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{22}{3}\right)}}{2} = \frac{-\frac{14}{3} \pm \sqrt{-36}}{2} = -\frac{7}{3} \pm 3\,i$$

All 3 Roots of 'x' (x_1, x_2, x_3):

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} = \frac{14}{3} - \frac{-1}{3} = 5$$

$$x_2 = y_2 - \frac{a}{3} = \left(-\frac{7}{3} + 3\,i\right) - \frac{-1}{3} = -2 + 3\,i$$

$$x_3 = y_3 - \frac{a}{3} = \left(-\frac{7}{3} - 3\,i\right) - \frac{-1}{3} = -2 - 3\,i$$

$$x = 5, \ \ (-2 + 3i), \ \ (-2 - 3i)$$

$Example - 3$

$$x^3 - 17x^2 + 92x - 154 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 17x^2 + 92x - 154 = 0$$

$$p = b - \frac{a^2}{3} = 92 - \frac{(-17)^2}{3} = -\frac{13}{3} \quad , \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2(-17)^3}{27} - \frac{(-17)\times(92)}{3} + (-154) = \frac{92}{27}$$

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \Rightarrow y^3 - \frac{13}{3}y + \frac{92}{27} = 0 \qquad \rightarrow \textit{Depressed Equation}$$

$$m = \frac{-q}{2} = \frac{-\frac{92}{27}}{2} = -\frac{46}{27} \quad , \quad N = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{92}{27}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{13}{3}}{3}\right)^3 = -\frac{1}{9}$$

Since 'N' is Negative:

$$n = \sqrt{|N|} = \sqrt{\left|-\frac{1}{9}\right|} = \frac{1}{3}$$

$$z = m + in = -\frac{46}{27} + \frac{1}{3}i$$

$$r = |z| = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{\left(-\frac{46}{27}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{13\sqrt{13}}{27}$$

Since 'z' is in The Second Coordinate:

$$\theta = \arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{n}{m}\right) = \pi - \tan^{-1}\left(\left|\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{46}{27}}\right|\right) = 2.952393631 = 168.9297974°$$

Since 'N' is Negative, First Root of 'y' (y_1):

$$y_1 = 2\sqrt[2]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 2\sqrt[2]{\frac{13\sqrt{13}}{27}}\cos\left(\frac{168.9297974°}{3}\right) = \frac{4}{3} = t$$

Other 2 Root of 'y' (y_2, y_3):

$$y_{2,3} = \frac{-t \pm \sqrt{-3t^2 - 4p}}{2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{-3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{13}{3}\right)}}{2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm 2\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

All 3 Roots of 'x' (x_1, x_2, x_3):

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} = \frac{4}{3} - \frac{-17}{3} = 7$$

$$x_2 = y_2 - \frac{a}{3} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{-17}{3} = 5 + \sqrt{3}$$

$$x_3 = y_3 - \frac{a}{3} = \left(-\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{-17}{3} = 5 - \sqrt{3}$$

$$x = 7, \ \left(5 + \sqrt{3}\right), \ \left(5 - \sqrt{3}\right)$$